

# Malhas Poligonais Multiresolução

Frutuoso G. M. Silva  
IT – Grupo de Redes e Multimedia  
Departamento de Informática, Universidade da Beira Interior  
Rua Marquês d'Ávila e Bolama, 6201-001 Covilhã  
fsilva@di.ubi.pt

---

## Resumo

*Este artigo apresenta o estado da arte sobre a análise multiresolução na área da Computação Gráfica e descreve um esquema multiresolução desenvolvido para malhas poligonais. O esquema multiresolução baseia-se num novo algoritmo de simplificação de malhas (NSA) e num algoritmo de refinamento de malhas. Assim, apresenta-se o algoritmo de simplificação de malhas NSA e os principais resultados obtidos. O algoritmo NSA consegue reduzir em cerca de 50% o número de faces de um modelo poligonal numa única simplificação, mantendo a forma global do modelo e a sua fronteira. Este algoritmo de simplificação é o mais rápido dentro da sua classe.*

## Palavras chave

*Análise multiresolução, simplificação de malhas, malhas multiresolução.*

---

## 1. INTRODUÇÃO

A complexidade dos modelos tridimensionais tem aumentado bastante devido principalmente às tecnologias de aquisição de dados tridimensionais como os *scanners* 3D. Este tipo de tecnologias produzem hoje modelos poligonais a partir de objectos reais, normalmente designados por malhas poligonais que são usadas nas mais variadas aplicações como, por exemplo, na visualização, nos ambientes virtuais e nos jogos de computador. De facto, muitos trabalhos de investigação têm surgido nos últimos anos no que se refere a malhas poligonais, particularmente na edição de malhas [Kobbelt99, Suzuki00, Sorkine04], na compressão geométrica e transmissão pela Internet [Taubin98, Touma98, Karni00], e na análise multiresolução aplicada a malhas [Hoppe96, Zorin97, Garland99, Kobbelt00, Botsch03].

No entanto, as malhas geradas pelos *scanners* 3D possuem muitas vezes informação redundante devido à elevada resolução destes dispositivos, a qual é aplicada de forma uniforme e independentemente das características de forma do objecto.

A manipulação eficiente de malhas com grande número de células é conseguida através do uso de múltiplas representações com diferente resolução para cada objecto geométrico. Isto é, usando modelos com diferentes níveis de detalhe, ou seja, modelos LOD (*Level-Of-Detail*). No entanto, a análise multiresolução veio introduzir uma representação alternativa aos modelos LOD. A análise multiresolução permite representar um modelo com diferentes níveis de detalhe

com apenas uma única malha em memória em cada instante. Depois, com o auxílio de algoritmos de simplificação e refinamento faz-se a passagem de um nível de detalhe para o seguinte e para o anterior, consoante as necessidades da aplicação.

Este artigo faz um resumo da análise multiresolução na área da Computação Gráfica e apresenta um esquema multiresolução para malhas poligonais. Para isso foi desenvolvido um novo algoritmo de simplificação de malhas, designado de *Normal-based Simplification Algorithm* (NSA).

Este artigo está organizado em várias secções: A secção 2 apresenta as diferentes abordagens da análise multiresolução na Computação Gráfica. A secção 3 apresenta um esquema multiresolução para malhas. A secção 4 apresenta o algoritmo NSA de simplificação de malhas desenvolvido e que serve de base ao esquema multiresolução apresentado. Na secção 5 apresenta-se alguns resultados sobre malhas multiresolução e sobre o algoritmo NSA. Por último, na secção 6 apresenta-se algumas conclusões e o trabalho futuro.

## 2. A MULTIRESOLUÇÃO NA COMPUTAÇÃO GRÁFICA

A análise multiresolução está inevitavelmente associada às onduletas (*wavelets*) na Matemática e no processamento de imagem.

A Tabela 1 apresenta uma classificação das diferentes abordagens da análise multiresolução na Computação Gráfica. Esta classificação baseia-se na representação hierárquica da granularidade dos modelos. Por exemplo,

num algoritmo de subdivisão é gerado um modelo mais detalhado de um objecto geométrico do que o modelo original. Ao invés, no caso dos algoritmos baseados em onduletas e dos algoritmos de simplificação está associada uma granularidade mais grosseira ao modelo gerado do que a do objecto original. As diferentes abordagens são apresentadas de seguida.

Abordagens	Classificação
Onduletas	Detalhado → Grosseiro
Algoritmos de Subdivisão	Grosseiro → Detalhado
Algoritmos de Simplificação	Detalhado → Grosseiro

Tabela 1: Classificação das diferentes abordagens da multiresolução na Computação Gráfica.

### 2.1. Onduletas

As onduletas são uma ferramenta matemática da análise multiresolução. As onduletas permitem decompor hierarquicamente uma função em duas partes: uma função aproximada mais simples (ou com menos resolução) e os coeficientes de detalhe necessários para recuperar a função original.

Em Computação Gráfica, pode usar-se também a teoria das onduletas para simplificar malhas, através da aplicação de uma transformação **A** que cria uma malha grosseira e ao mesmo tempo aplicando outra transformação **B** para captar o detalhe que é perdido devido à primeira transformação (Figura 1). Mais informações sobre onduletas em Computação Gráfica podem ser encontradas em [Fournier95, Stollnitz96].

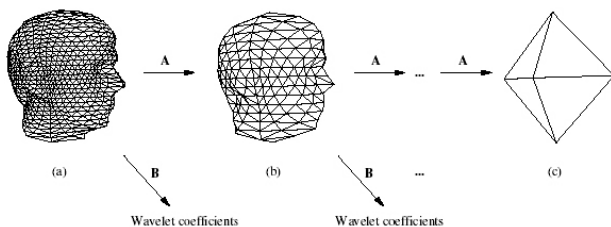


Figura 1: Decomposição de uma malha poligonal (retirada de [Lounsbery97]).

### 2.2. Algoritmos de Subdivisão

Em Computação Gráfica, os algoritmos de subdivisão são usados para criar superfícies por subdivisão ou malhas poligonais com diversos níveis de detalhe. A partir de um modelo grosseiro gera-se um modelo mais detalhado por subdivisão sucessiva das células da malha, como ilustra a Figura 2 para o caso de uma malha triangular.

Na Figura 2 vê-se a malha inicial  $M_0$  e dois passos do algoritmo de subdivisão que geram  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente. Claro que a subdivisão obedece a regras precisas que permitem distinguir um esquema de subdivisão de outro.

As superfícies obtidas por subdivisão têm importantes propriedades de modelação: suportam malhas com topologias arbitrárias, garantem uma certa continuidade da superfície (continuidade  $C^0$ ) e permitem o

desenvolvimento de algoritmos eficientes que são simples de codificar.

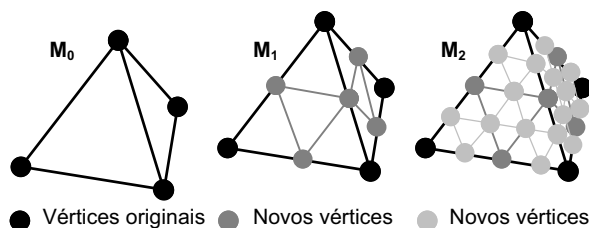


Figura 2: Subdivisão de uma malha poligonal.

A subdivisão permite definir uma curva ou superfície como o limite de uma sequência de refinamentos (subdivisões) sucessivos de um modelo inicial grosseiro. Existem vários esquemas de subdivisão para superfícies (e também para curvas). Os primeiros esquemas de subdivisão para malhas irregulares foram os esquemas de Catmull-Clark [Catmull78] e de Doo-Sabin [Doo78]. Mais tarde surgiu o esquema de Loop [Loop87] para malhas triangulares arbitrárias. Dyn *et al.* [Dyn90] apresentaram um novo esquema designado de *butterfly* para interpolar superfícies obtidas por subdivisão triangulares com continuidade  $C^1$ . Kobbelt [Kobbelt96] apresentou também um esquema com continuidade  $C^1$  mas para malhas quadrangulares com topologia arbitrária. Note-se que todos estes esquemas permitem criar diversas aproximações à malha. A diferença entre eles reside no cálculo da geometria dos novos vértices. Esquemas alternativos têm surgido na literatura e estão descritos em [Zorin00, Velho01, Warren02].

A Figura 3 evidencia as diferenças práticas entre os diversos esquemas de subdivisão referenciados anteriormente. Como se pode constatar, o resultado de cada esquema de subdivisão faz-se notar na forma final do objecto, podendo este ser maior ou menor e mais ou menos suave.

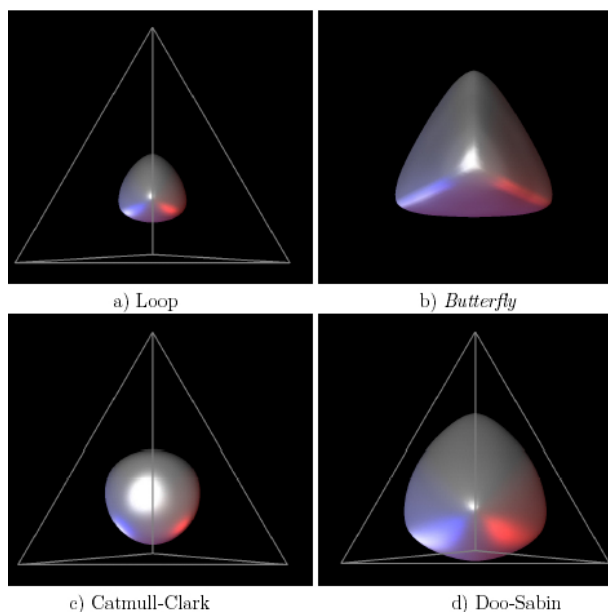


Figura 3: Comparação dos esquemas de subdivisão apresentados para um tetraedro (retirada de [Zorin00]).

Um resumo mais alargado dos esquemas de subdivisão e dos últimos desenvolvimentos na área pode ser consultado em [Sabin04].

### 2.3. Algoritmos de Simplificação

Os algoritmos de simplificação são outra das formas usadas na criação de representações multiresolução, ou seja, representações com uma estrutura hierárquica de modelos com diversos níveis de detalhe. Neste caso parte-se do modelo detalhado para obter um modelo mais grosseiro após vários passos de simplificação.

Simplificar uma malha poligonal  $M_i$  consiste na geração de outra malha  $M_j$  com menor número de células, onde a malha  $M_j$  obedece a um critério que estabelece um erro máximo admissível. Em alguns casos, o erro é imposto implicitamente pelo número de células da malha  $M_j$ .

Os algoritmos de simplificação podem ser classificados em três categorias, consoante o tipo de operação usada para a simplificação da malha. Assim, temos as seguintes categorias:

#### Remoção de células (*Cell decimation*).

Basicamente, estes algoritmos seleccionam uma célula (vértice, aresta ou face) para remover, após o que removem também todas as suas células adjacentes, o que implica a reconstrução da malha na zona de onde foram removidas as células. Embora estes algoritmos reduzam o número de células da malha, a topologia do modelo é preservada. A sua principal vantagem é que os vértices que permanecem na malha pertencem à malha original, o que de alguma forma permite ter a informação da malha original. Este facto permite ainda a utilização dos atributos (cor, textura, etc.) dos vértices que se mantêm inalterados.

#### Confluência de vértices (*Vertex clustering*).

Os algoritmos desta classe utilizam um volume que envolve a malha, que depois é subdividido em pequenos sub-volumes. A subdivisão do volume envolvente pode ser do tipo *octree*. Na subdivisão *octree*, um volume é recursiva e hierarquicamente subdividido em oito sub-volumes. Os vértices que se encontrarem dentro de um mesmo sub-volume passam a ser representados apenas pelo vértice representativo (ou *cluster*), sendo então criada uma nova malha com base apenas nos vértices representativos. O vértice representativo pode ser o centro de massa do sub-volume ou outro ponto qualquer do sub-volume escolhido por um critério pré-definido. Normalmente, estes algoritmos produzem aproximações muito grosseiras do modelo porque não preservam nem a topologia nem a geometria do modelo, e a qualidade das malhas depende sempre da dimensão do sub-volume criado.

#### Contração de arestas (*Edge collapsing*).

Estes algoritmos simplificam a malha iterativamente pela contração de arestas em vértices. A escolha da aresta a contrair é uma das características intrínsecas de cada algoritmo que determina como as simplificações são geradas. Estes algoritmos mantêm a topologia do modelo e os vértices do modelo simplificado também podem pertencer ao modelo original. A operação de

contração de arestas tem como desvantagem poder causar localmente auto-intersecções ou inflexões na malha, pelo que se torna necessário identificar cuidadosamente estas situações. O algoritmo NSA descrito na Secção 4 pertence a esta categoria.

### 3. MALHAS MULTIRESOLUÇÃO

Uma malha multiresolução permite representar um modelo para diferentes níveis de detalhe mas com apenas uma única malha em memória em cada instante. Assim, a passagem de um nível de detalhe para o seguinte e para o anterior faz-se por aplicação de algoritmos de simplificação e refinamento.

Neste caso, o esquema multiresolução desenvolvido para malhas baseia-se no algoritmo de simplificação NSA que é descrito na secção seguinte.

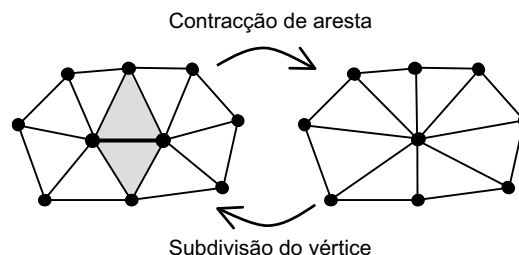


Figura 4: Esquema multiresolução.

O algoritmo NSA é baseado na operação de contração de arestas enquanto que o algoritmo de refinamento é baseado na operação inversa, a subdivisão de vértices. O refinamento da malha é efectuado recorrendo a um algoritmo similar ao proposto por Hoppe para as malhas progressivas [Hoppe96]. A Figura 4 apresenta o esquema multiresolução desenvolvido com base na contração de arestas e na subdivisão de vértices.

A estrutura de dados utilizada no desenvolvimento das malhas multiresolução e dos respectivos algoritmos de simplificação e refinamento, foi a estrutura de dados AIF. A estrutura de dados AIF permite o acesso rápido à informação topológica sobre adjacências e incidências. Além disso, a estrutura de dados AIF é uma estrutura de dados B-rep que permite representar malhas poligonais genéricas, ou seja, malhas não necessariamente triangulares nem *manifold*. A estrutura de dados AIF permite representar malhas bidimensionais onde:

- um *vértice* é definido em termos das arestas que lhe são incidentes;
- uma *aresta* é definida em termos dos seus vértices adjacentes e das faces que lhe são incidentes;
- uma *face* é definida em termos das suas arestas adjacentes.

Mais detalhes sobre a estrutura de dados AIF podem ser vistos em [Silva04a].

### 4. ALGORITMO DE SIMPLIFICAÇÃO – NSA

A simplificação de uma malha é feita por contração de arestas em vértices. No caso do algoritmo NSA o vértice escolhido para a contração da aresta é o vértice correspondente ao seu ponto médio. No entanto, nada impede que seja outro o ponto escolhido.

Este algoritmo tem como particularidade usar o mesmo critério para a escolha e validação da aresta a contrair, contrariamente aos outros algoritmos da sua classe.

No algoritmo NSA a escolha da aresta a contrair baseia-se na variação das normais às faces em redor da aresta. Assim, a contracção de uma aresta no algoritmo NSA só acontece quando a variação das normais às faces em redor da aresta a contrair estiver contida numa dada tolerância  $\epsilon$ . O valor de  $\epsilon$  define a variação admissível para o ângulo entre as normais às faces antes e depois da contracção da aresta. Este valor é especificado pelo utilizador num intervalo pré-definido. Quanto maior for o valor de  $\epsilon$  maior será a simplificação da malha. Além disso, para um mesmo valor de  $\epsilon$  o algoritmo cria sempre um número finito de simplificações. Isto é, existe uma simplificação a partir do qual já não é possível simplificar mais a malha para o mesmo valor de  $\epsilon$ .

Este é um critério geométrico que requer que a região à volta da aresta a contrair seja aproximadamente complanar. Mas o contrário já não é verdade, ou seja, a complanaridade não assegura que exista uma variação mínima das normais às faces. Por exemplo, a Figura 5 mostra dois casos de faces complanares, mas só as faces da Figura 5(a) respeitam o critério visto que temos duas faces com a mesma orientação, enquanto que na Figura 5 (b) temos duas faces com orientações opostas, apesar de complanares.

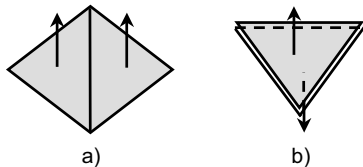


Figura 5: Faces complanares.

Note-se que o algoritmo NSA requer a quasi-complanaridade da região a simplificar, o que acaba por validar simultaneamente as operações de escolha e contracção de arestas, pois a operação de contracção só é permitida quando a variação das normais às faces for menor que um dado  $\epsilon$ .

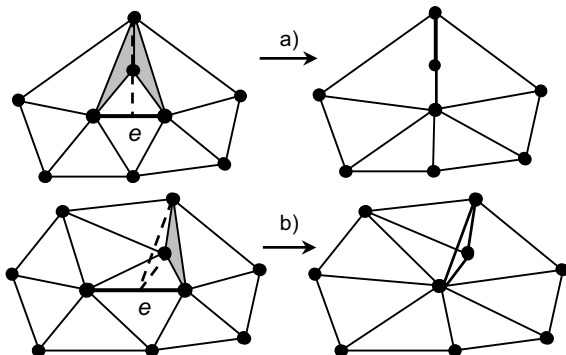


Figura 6: Validação da operação de contracção de arestas.

De facto, a operação de contracção de arestas pode causar inversões locais na superfície da malha, a menos que haja uma forma de controlar a sobreposição de faces (Figura 6(a)) ou a criação de concavidades (Figura 6(b)) na malha, que podem aparecer depois da contracção de uma aresta.

Por exemplo, na Figura 6(a) a contracção da aresta  $e$  provoca a sobreposição das faces sombreadas como se indica pelo segmento a traço interrompido. Similarmente, a face sombreada na Figura 6(b) passa a estar na posição indicada pela face a traço interrompido, o que significa que muda de orientação depois da contracção da aresta  $e$ . Em ambos os casos o algoritmo NSA não permite a contracção da aresta  $e$  porque a variação das normais seria maior do que  $\epsilon$ , e assim sendo faz simultaneamente a validação da operação de contracção de arestas.

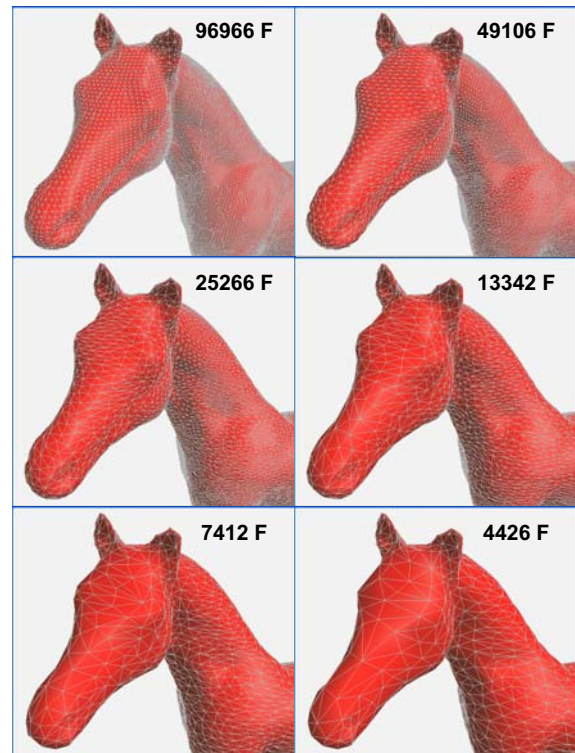


Figura 7: Malha de um cavalo (original e cinco simplificações).

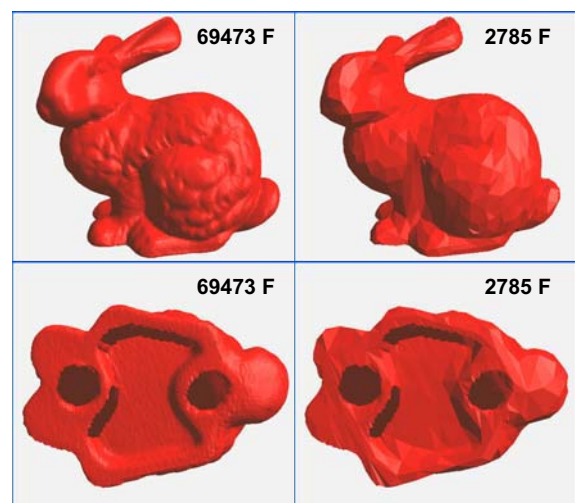


Figura 8: Malha de um coelho (original e a última simplificação).

O algoritmo NSA consegue reduzir o número de faces de uma malha até cerca de 50%, numa única simplificação. Por exemplo, na Figura 7 pode ver-se a

malha de um cavalo com 96966 faces (na malha original) e cinco simplificações criadas com o algoritmo NSA. Neste caso, para a primeira simplificação a redução do número de faces atingiu os 49,35%.

Como se pode ver também na Figura 7, o algoritmo NSA mantém a forma global do objecto onde apenas alguns detalhes de forma se vão perdendo em cada simplificação. O algoritmo NSA mantém ainda a fronteira da malha pois não é permitida a contracção de arestas da fronteira, ou de arestas que possam causar alterações na fronteira. Como se pode constatar na Figura 8 para o caso de um coelho a sua fronteira mantém-se inalterada durante todas as simplificações.

Além disso, os teste comparativos entre o algoritmo NSA e Qslim [Garland97] mostraram que é o algoritmo mais rápido dentro da sua classe. Pode dizer-se que isto se deve principalmente a três factores: (i) a usar um critério meramente geométrico e simples de calcular, (ii) de se contrair as arestas sempre no seu ponto médio, evitando cálculos adicionais, e (iii) devido à estrutura de dados AIF de suporte que permite o acesso rápido à informação topológica. Note-se que o algoritmo Qslim é de acordo com a literatura [Cignoni98] o mais rápido.

## 5. RESULTADOS

O hardware de suporte ao desenvolvimento das malhas multiresolução foi um PC equipado com um processador Pentium 4, com 768MB de memória, uma placa gráfica GeForce 4 com 64MB, e o sistema operativo Windows 2000.

O desempenho dos algoritmos de simplificação e refinamento de malhas depende sempre da dimensão da malha, ou seja, quantas mais células a malha contiver maior é o tempo necessário à sua simplificação e ao seu refinamento. Por exemplo, a Figura 9 apresenta os tempos de simplificação e refinamento para a malha do coelho, ou seja, apresenta os tempos necessários à passagem de um nível de detalhe para o seguinte e para o anterior. Como se pode ver os tempos de refinamento são sempre inferiores aos tempos de simplificação o que advém do facto de o algoritmo de refinamento saber *a priori* quais são os vértices a subdividir, enquanto que o algoritmo de simplificação tem de escolher as aresta a contrair de acordo com o critério estabelecido. A Figura 10 compara os tempos de simplificação para a malha do coelho entre os algoritmos Qslim e NSA. Como se pode ver o algoritmo NSA é o mais rápido especialmente nas primeiras simplificações, sendo a diferença já pouco significativa para as últimas simplificações.

Quanto à qualidade das malhas geradas pelo algoritmo NSA pode ver-se na Figura 11 por comparação com o algoritmo Qslim para a malha do coelho. De facto, o algoritmo NSA para as últimas simplificações gera malhas de menor qualidade em relação às do algoritmo Qslim. Mais detalhes sobre o algoritmo NSA podem ser vistos em [Silva04], incluindo mais resultados comparativos sobre tempos e qualidade das malhas geradas.

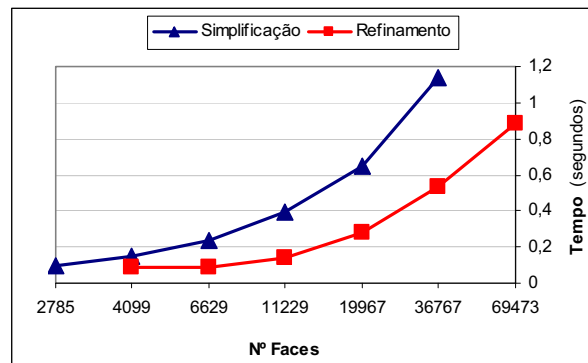


Figura 9: Tempos de simplificação e refinamento para a malha do coelho.

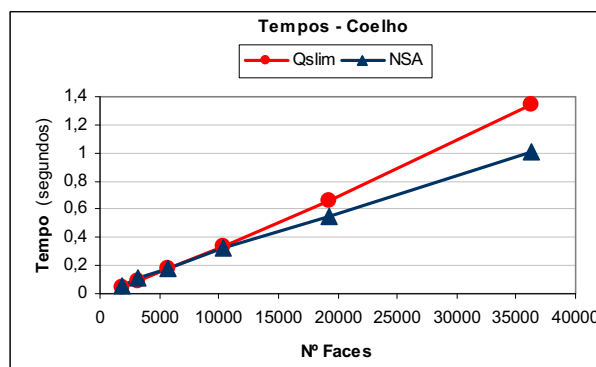


Figura 10: Tempos de simplificação para os algoritmos Qslim e NSA para a malha do coelho.

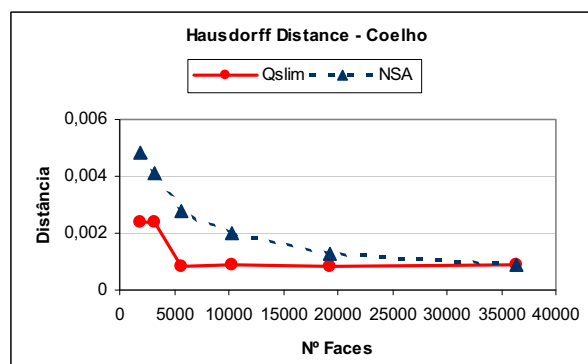


Figura 11: Qualidade da malha para os algoritmos Qslim e NSA para a malha do coelho.

## 6. CONCLUSÃO E TRABALHO FUTURO

Este artigo faz um resumo da análise multiresolução na área da Computação Gráfica. Neste contexto, apresentou-se um esquema multiresolução para malhas poligonais baseado num novo algoritmo de simplificação de malhas (NSA). Note-se que o algoritmo NSA de simplificação de malhas consegue reduzir a cerca de metade o número de faces de uma malha numa única simplificação, mantendo a forma global do objecto e a sua fronteira. Além disso, é o algoritmo mais rápido dentro da sua classe.

O desempenho dos algoritmos de simplificação e refinamento ainda limita a utilização de modelos multiresolução para alguns tipos de aplicações. No entanto, estes modelos já são hoje usados em algumas



áreas com sucesso como, por exemplo, na compressão e transmissão de modelos geométricos pela Internet, na visualização dependente do contexto e na edição interactiva de malhas. No futuro os modelos multiresolução poderão vir mesmo a substituir os modelos LOD. Por exemplo, quando pudermos ter os algoritmos de simplificação e refinamento codificados em hardware. Isto porque, os modelos LOD necessitam de armazenar diversas representações de um mesmo objecto em memória, contrariamente aos modelos multiresolução que mantêm apenas uma única representação em memória.

No futuro espera-se desenvolver um protótipo de um sistema de animação que possa integrar o esquema multiresolução descrito neste artigo. Assim, os objectos do sistema de animação terão uma representação multiresolução o que permitirá representá-los para diferentes níveis de detalhe utilizando algoritmos de simplificação e refinamento.

## AGRADECIMENTOS

Os malhas utilizadas neste trabalho são cortesia de: Cyberware - Cavalo e Stanford University - Coelho.

## REFERÊNCIAS

- [Botsch03] Mario Botsch and Leif Kobbelt. Multiresolution Surface Representation Based on Displacement Volumes. *In Proceedings of Eurographics*, pp.483-491, 2003.
- [Catmull78] E. Catmull and J Clark. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer Aided Design*, Vol 10, pp.350-355, 1978.
- [Cignoni98] P. Cignoni, C. Montani and R. Scopigno. A comparison of mesh simplification algorithms. *Computers and Graphics*, Vol 22, no.1, pp.37-54, 1998.
- [Doo78] D. Doo and M. Sabin. Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points. *Computer Aided Design*, Vol 10, no.6, pp.356-360, 1978.
- [Dyn90] Nira Dyn, David Levin and John A. Gregory. A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control. *ACM Transactions on Graphics*, Vol 9, no.2, pp.160-169, 1990.
- [Fournier95] Alain Fournier. Wavelets and their Applications in Computer Graphics. *In Siggraph Course Notes*, 1995.
- [Garland97] Michael Garland and Paul S. Heckbert. Surface Simplification Using Quadric Error Metrics. *In Proceeding of Siggraph*, pp.209-216, 1997.
- [Garland99] Michael Garland. Multiresolution modeling: Survey & future opportunities. *In Eurographics - State of the Art Reports*, pp.111-131, 1999.
- [Hoppe96] Hugues Hoppe. Progressive Meshes. *In Proceedings of Siggraph*, pp.99-108, 1996.
- [Karni00] Zachi Karni and Craig Gotsman. Spectral Coding of Mesh Geometry. *In Proceedings of Siggraph*, pp.279-286, 2000.
- [Kobbelt96] Leif Kobbelt. Interpolatory subdivision on open quadrilateral nets with arbitrary topology. *Computer Graphics Forum*, Vol 15, no.3, pp.409-420, 1996.
- [Kobbelt99] Leif Kobbelt, Jens Vorsatz and Hans-Peter Seidel. Multiresolution hierarchies on unstructured triangle meshes. *Computational Geometry Journal: Theory and Applications*, Vol 14, pp.5-24, 1999.
- [Kobbelt00] Leif Kobbelt, Thilo Bareuther and Hans-Peter Seidel. Multiresolution Shape Deformations for Meshes with Dynamic Vertex Connectivity. *In Proceedings of Eurographics*, pp.C249-C260, 2000.
- [Loop87] Charles Loop. *Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles*. Master's Thesis, Utah University, 1987.
- [Lounsbery97] Michael Lounsbery, Tony D. DeRose and Joe Warren. Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Type. *ACM Transactions on Graphics*, Vol 16, no.1, pp.34-73, 1997.
- [Sabin04] Malcolm Sabin. Recent Progress in Subdivision: a Survey. *In Advanced in Multiresolution for Geometric Modelling*, Dodgson, Floater, Sabin (Eds.), Springer, pp.203-230, 2004.
- [Silva04] Frutuoso G. M. Silva and Abel J. P. Gomes. Normal-based simplification algorithm for meshes. *In Proceedings of Theory and Practice of Computer Graphics (TPCG'04)*, pp.211-218, 2004.
- [Silva04a] Frutuoso G. M. Silva and Abel J. P. Gomes. A B-rep data structure for polygonal meshes. *VIRTUAL - The Portuguese Journal of Computer Graphics*, Special edition - Advances in Computer Graphics in Portugal, Adérito Marcos and Miguel Salles Dias (eds.), Novembro, 2004.
- [Sorkine04] Olga Sorkine, Daniel Cohen-Or, Yaron Lipman, Marc Alexa, Christian Rössl and Hans-Peter Seidel. Laplacian Surface Editing. *In Proceedings of Eurographics Symposium on Geometry Processing*, pp.179-188, 2004.
- [Stollnitz96] Eric J. Stollnitz, Tony D. DeRose, David H. Salesin and Anthony D. DeRose. *Wavelets for Computer Graphics: Theory and Applications*. Morgan Kaufmann, 1996.
- [Suzuki00] Hiromasa Suzuki, Yusuke Sakurai, Takashi Kanai and Fumihiko Kimura. Interactive mesh dragging with an adaptive remeshing technique. *The Visual Computer*, Vol.16, no.3/4, pp.159-176, 2000.
- [Taubin98] G. Taubin and J. Rossignac. Geometric compression through topological surgery. *ACM Transactions on Graphics*, Vol.17, no.2, pp.84-115, 1998.
- [Touma98] Costa Touma and Craig Gotsman. Triangle Mesh Compression. *In Proceedings of Graphics Interface*, pp.26-34, 1998.
- [Velho01] Luis Velho. Quasi 4-8 Subdivision. *Computer-Aided Geometric Design*, 2001.
- [Warren02] Joe Warren and Henrik Weimer. *Subdivision Methods For Geometric Design - A constructive approach*, Morgan Kaufman, 2002.
- [Zorin97] D. Zorin, P. Schröder and W. Sweldens. Interactive Multiresolution Mesh Editing. *In Proceedings of Siggraph*, pp.259-268, 1997.
- [Zorin00] D. Zorin and P. Schröder. Subdivision for modeling and animation. *In Siggraph Course Notes*, 2000.