

**ANÁLISE DE IMAGENS SINTETIZADAS APLICANDO  
RADIOSSIDADE EM CONJUNTO COM O  
MÉTODO DO DIFERENCIAL PARAMÉTRICO**

**Gladimir V. Guimarães Baranoski**

**Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação - UFRGS  
Caixa Postal 1501 - 90001 - Porto Alegre - RS - BRASIL**

**RESUMO**

O método da radiosidade desempenha um papel importante na síntese de imagens realísticas. Uma de suas características principais é prover um modelo de iluminação global. Além disso, apresenta a vantagem de ser independente da posição do observador, o que torna conveniente o seu emprego na produção de seqüências de animação por câmera. Entretanto, apresenta um significativo custo computacional associado ao cálculo dos fatores de forma das superfícies, sendo este o seu aspecto crítico.

O objetivo principal desta comunicação é analisar a aplicação do método da radiosidade à síntese de imagens, utilizando o método do diferencial paramétrico (MDP), apresentado inicialmente em [BAR 90], no cálculo dos fatores de forma, e considerando o emprego de equipamentos de pequeno porte com baixa resolução luminosa e limitações de memória e velocidade de processamento. Através da análise dos tempos de processamento e da qualidade das imagens geradas, é avaliada a viabilidade do emprego do método da radiosidade em conjunto com o MDP neste tipo de ambiente de "hardware" limitado e são apontadas alternativas para os problemas encontrados.

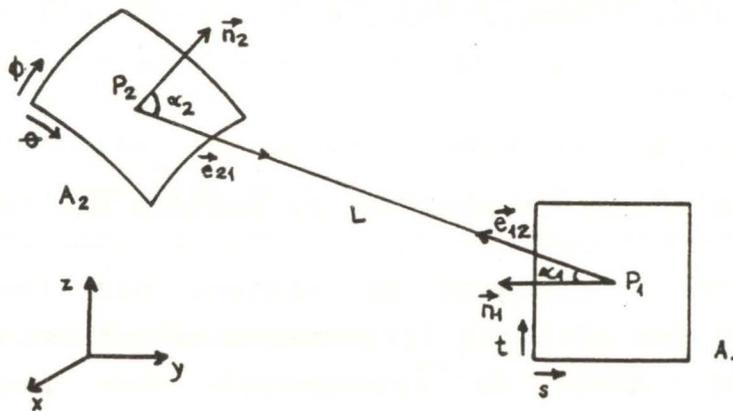


1. Fundamentos do Método do Diferencial Paramétrico

O método do diferencial paramétrico (MDP), apresentado em detalhe em [BAR 91], tem como objetivo principal permitir a síntese de imagens de objetos formados por superfícies curvas, através do método da radiosidade, sem que estas sejam aproximadas por polígonos. Ao não efetuar tais aproximações, permite que sejam obtidos fatores de forma com uma maior grau de exatidão e que sejam utilizadas as descrições exatas das superfícies durante o "rendering" das imagens.

O MDP considera as superfícies e/ou objetos que compõem o ambiente fechado a ser simulado, descritos por equações paramétricas. Levando em conta este aspecto e utilizando princípios de geometria analítica e do cálculo de funções vetoriais [WIL 75], fornece uma expressão geral e simplificada para o fator de forma entre duas superfícies finitas paramétricas  $A_1$  e  $A_2$ . Esta expressão corresponde à geometria apresentada na figura 1 e é dada a seguir:

$$F_{1-2} = \frac{1}{\pi \int_t \int_s |\vec{n}_1| ds dt} \int_{\theta} \int_{\phi} \int_t \int_s \frac{(\vec{n}_1 \cdot \vec{e}_{12})(\vec{n}_2 \cdot \vec{e}_{21})}{L^4} ds dt d\phi d\theta$$



- $t, s$  = variáveis que descrevem  $A_1$ .
- $\theta, \phi$  = variáveis que descrevem  $A_2$ .
- $\vec{n}_1$  = normal à  $A_1$  no ponto  $P_1(t, s)$ .
- $\vec{n}_2$  = normal à  $A_2$  no ponto  $P_2(\theta, \phi)$ .
- $\vec{e}_{12}$  = vetor unindo  $P_1$  a  $P_2$ .
- $\vec{e}_{21}$  = vetor unindo  $P_2$  a  $P_1$ .
- $L$  = distância entre  $P_1$  e  $P_2$ .

Figura 1. Geometria do fator de forma entre duas superfícies paramétricas.

As integrais correspondentes a expressão anterior são avaliadas numericamente através do método da quadratura gaussiana [CLA 89], em virtude deste ser o método de quadratura com melhor desempenho para este tipo de aplicação. A avaliação numérica constitui-se na transformação das integrais anteriores em somatórios. O número de parcelas destes somatórios é dado pela seguinte expressão:

$$\text{número de parcelas} = p^n$$

onde:

p=número de pontos de Gauss.

n=número de variáveis paramétricas empregadas.

Em geral as imagens sintetizadas aplicando radiossidade correspondem a ambientes não convexos, onde existem superfícies que não são totalmente visíveis por outras. A técnica empregada pelo MDP para resolver problemas de ocultamento referentes a superfícies em um ambiente não convexo é semelhante a empregada por Wallace et alii em [WAL 89], sendo acrescentados testes de visibilidade que consideram a possibilidade de curvatura das superfícies. Através desta técnica são identificadas as parcelas do somatório que correspondem a pares de pontos não visíveis entre si. Estas parcelas não devem ser computadas no somatório e a sua identificação evita cálculos desnecessários e afeta diretamente a exatidão dos fatores de forma.

## 2. Descrição das Etapas do Processo de Síntese das Imagens

Durante o processo de síntese das imagens foram tomadas decisões que afetaram diretamente os resultados obtidos. Por este motivo, antes da apresentação das imagens e da análise propriamente dita, serão descritas nesta seção, de forma sucinta, as etapas do processo de síntese das imagens.

### 2.1 Escolha das Cores

Como a resolução luminosa disponível não permite a exibição de todos os tons correspondentes às intensidades dos "pixels" das imagens, torna-se necessário utilizar um algoritmo de escolha da "palette" mais adequada. O algoritmo empregado foi o da populosoidade [GOM 90]. Este algoritmo

divide-se em duas etapas. Na primeira, são verificados quais tons são os mais freqüentes. Na segunda, os tons correspondentes às intensidades de cada "pixel" da imagem são substituídos pelos tons mais próximos entre os 256 mais freqüentes, já que esta é a resolução luminosa disponível.

A utilização deste algoritmo implica em que as cores estejam bem distribuídas quantitativamente na cena. Caso contrário, cores que apareçam em áreas reduzidas da imagem terão também um pequeno número de tonalidades disponíveis, prejudicando a simulação de efeitos luminosos e conseqüentemente o realismo das imagens geradas. Por esta razão e por trabalhar-se com equipamentos com resolução luminosa limitada, optou-se por usar apenas duas cores para as superfícies do ambiente fechado empregado na síntese das imagens. Foi escolhida a cor azul para a esfera e cinza para as faces, de forma a se ter um número maior de tons por cor na cena.

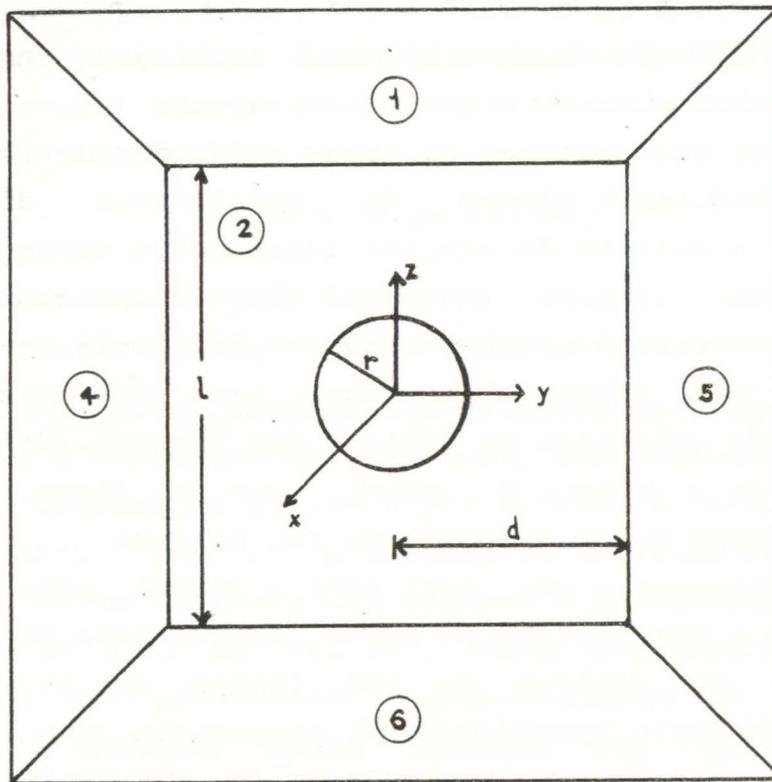
Escolheu-se a cor azul para a esfera, pois, segundo o trabalho sobre o uso efetivo de cores, apresentado em [MUR 84], as fronteiras de regiões de uma imagem, que se diferenciam entre si apenas pela quantidade da componente azul, são menos perceptíveis. Desta forma, a simulação de efeitos luminosos na superfície da esfera pode ser feita, empregando-se um número menor de tons, com uma menor probabilidade de se perceber os contornos dos "patches".

O uso da cor cinza para as faces também baseou-se no trabalho já citado. Procurou-se fazer uso de cores visualmente confortáveis como azul e cinza, a fim de evitar uma possível fadiga visual como ocorreria, por exemplo, com azul e vermelho.

## 2.2 Cálculo das Radiosidades

Em equipamentos de pequeno porte, como os utilizados, há limitações de espaço de memória para as estruturas de dados empregadas: a matriz de fatores de forma, os vetores de radiosidades e a matriz de intensidades por "pixel". Por este motivo, e de modo a não tornar o tempo de processamento excessivamente longo, o ambiente fechado empregado na síntese das imagens deste trabalho, descrito na figura 1, foi dividido em um número reduzido de "patches" (86), dos quais 32 correspondentes à esfera e 9 a cada uma das faces. A seguir fo-

ram calculados os fatores de forma dos "patches" através do MDP.



Face 3 frontal.  
 $r$  = raio da esfera.  
 $l$  = lado das quadriláteras.  
 $d$  = distância entre o centro da esfera e as faces.

Figura 2. Ambiente fechado empregado na síntese das imagens.

Após determinados os fatores de forma e arbitrados os valores correspondentes às reflectividades e emissividades das superfícies, foi montado o sistema de equações correspondente ao balanço de energia do ambiente fechado descrito na figura 2. Este sistema foi resolvido empregando-se o método de eliminação de Gauss-Jordan [CAR 69].

Após serem obtidas as radiosidades dos "patches", estas foram normalizadas. A seguir, a partir das radiosidades dos "patches", já normalizadas, obteve-se as radiosidades dos nós utilizando o algoritmo, apresentado em [COH 85], que calcula estes valores através da média das radiosidades dos "patches" aos quais os nós estão ligados.

### 2.3 Visualização

Empregou-se o conceito de câmara sintética, de forma a visualizar os objetos que compõem a cena. Como o objeto principal, a esfera, está posicionado na origem do sistema de coordenadas do universo, considerou-se o emprego de uma câmara sintética simples, voltada para a origem deste sistema, como adequado aos objetivos propostos.

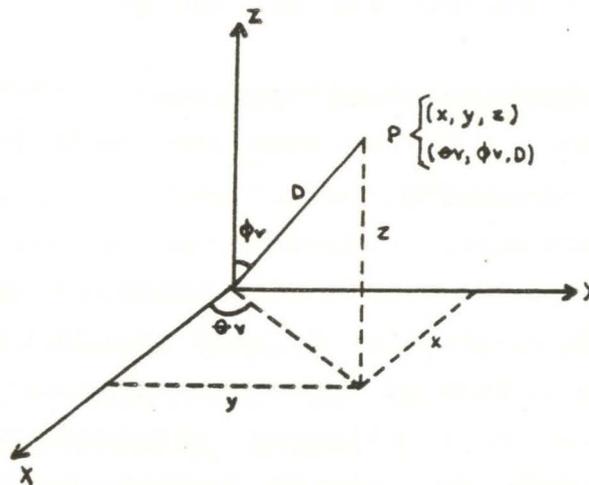


Figura 3. Geometria para o posicionamento da câmara sintética empregada.

Os algoritmos utilizados na implementação desta câmara são apresentados em detalhe em [PAR 85]. Os parâmetros de visualização considerados foram os ângulos  $\phi_v$  e  $\theta_v$  e a distância do observador ou da câmara,  $D$ , descritos na figura anterior.

### 2.4 Remoção dos Elementos Ocultos

Como os objetos são divididos em "patches", e no caso da esfera estes "patches" são curvos, não poderia ser empregado um algoritmo de remoção de elementos ocultos para polígonos, pois tal procedimento seria contrário à idéia central do MDP, que é a não aproximação de superfícies curvas por polígonos.

Duas alternativas foram pesquisadas. A primeira foi a subdivisão dos "patches" até se chegar a uma resolução correspondente à área de um "pixel", proposta por Catmull em [CAT 74]. A segunda foi a utilização de algoritmos empregados

pelo método de "ray-casting". Optou-se pela segunda alternativa, em virtude do algoritmo proposto por Catmull requerer muita memória, normalmente não disponível em um ambiente de "hardware" limitado.

O procedimento adotado consistiu em emitir raios partindo do observador e, empregando-se os algoritmos do método de traçado de raios, calcular a intersecção destes raios com as faces e a esfera. O ponto de intersecção mais próximo do observador é determinado como sendo o ponto visível. Esses algoritmos podem ser encontrados em [ROG 85].

### 2.5 Cálculo das Intensidades dos "Pixels"

Após se determinar qual ponto é visível e a qual superfície ele pertence, determina-se a qual "patch" ele pertence e também as suas coordenadas paramétricas.

Utilizando os valores de suas coordenadas paramétricas e os valores das radiosidades dos nós do "patch", emprega-se o algoritmo de interpolação bilinear, apresentado em [COH 85], e obtém-se a intensidade do "pixel" correspondente ao ponto de intersecção. Novamente, obtém-se três valores de intensidade, uma para cada componente do sistema RGB. Estes valores, assim obtidos, foram utilizados para a exibição das imagens no dispositivo escolhido.

### 3. Imagens Sintetizadas

Ao longo desta seção, serão apresentadas as imagens A, B e C, que foram obtidas empregando-se as respectivas "palettes" com tons de cinza e com tons de azul. Entretanto, vale ressaltar que a reprodução deste trabalho, incluindo as imagens que serão apresentadas, foi realizada empregando somente preto e branco.

As reflectividades ( $\rho$ ) das superfícies do ambiente fechado foram arbitradas utilizando os valores para as componentes do modelo de cores RGB apresentados na tabela a seguir.

Tabela 1. Reflectividades das superfícies.

Superfície	$\rho_R$	$\rho_G$	$\rho_B$
face 1	0.75	0.75	0.75
face 2	0.55	0.55	0.55
face 3	0.55	0.55	0.55
face 4	0.55	0.55	0.55
face 5	0.55	0.55	0.55
face 6	0.75	0.75	0.75
esfera	0,5	0.5	1.0

Considerou-se na geração das imagens A e B apenas a face 3 como superfície emissora de luz e a emissividade ( $e$ ) foi arbitrada empregando os seguintes valores para as componentes do modelo RGB:

$$e(1.27, 1.27, 1.27)$$

Para as demais superfícies, não emissoras de luz, a emissividade foi arbitrada utilizando valores iguais a zero para as três componentes do modelo RGB:

$$e(0, 0, 0)$$

Já para a imagem C foi considerado como único "patch" emissor de luz o "patch" central da face 6 e a emissividade correspondente foi arbitrada empregando os seguintes valores para as três componentes do modelo RGB:

$$e(7, 7, 7)$$

Os parâmetros de visualização empregados, segundo a geometria descrita na figura 3, são apresentados na tabela 2.

Tabela 2. Parâmetros de visualização das imagens.

Imagem	D	$\theta$	$\phi$
A	6	0°	90°
B	6	180°	90°
C	6	0°	90°

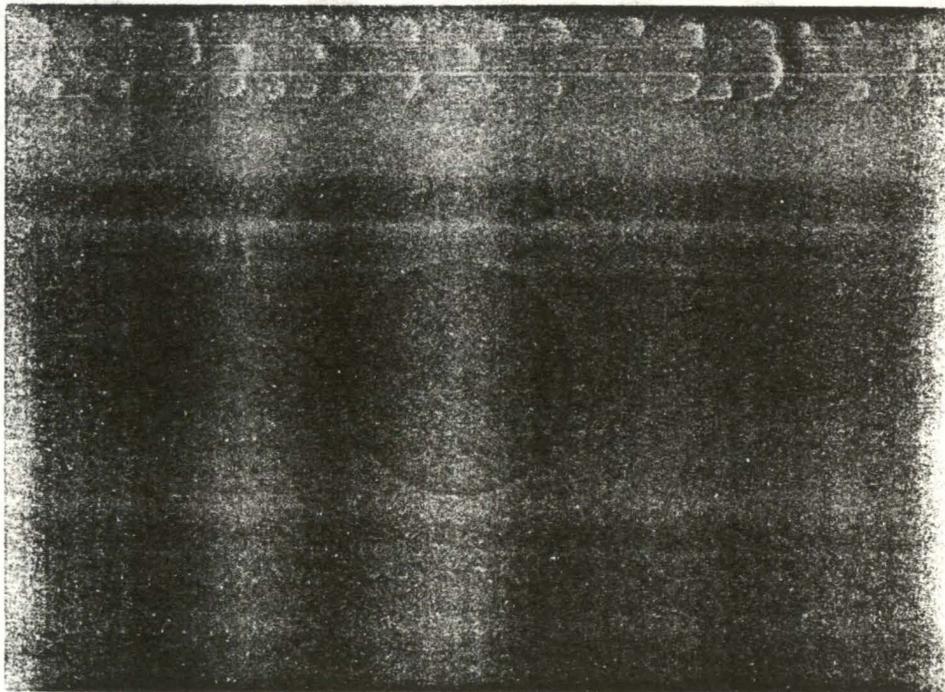


Figura 4. Imagem A.

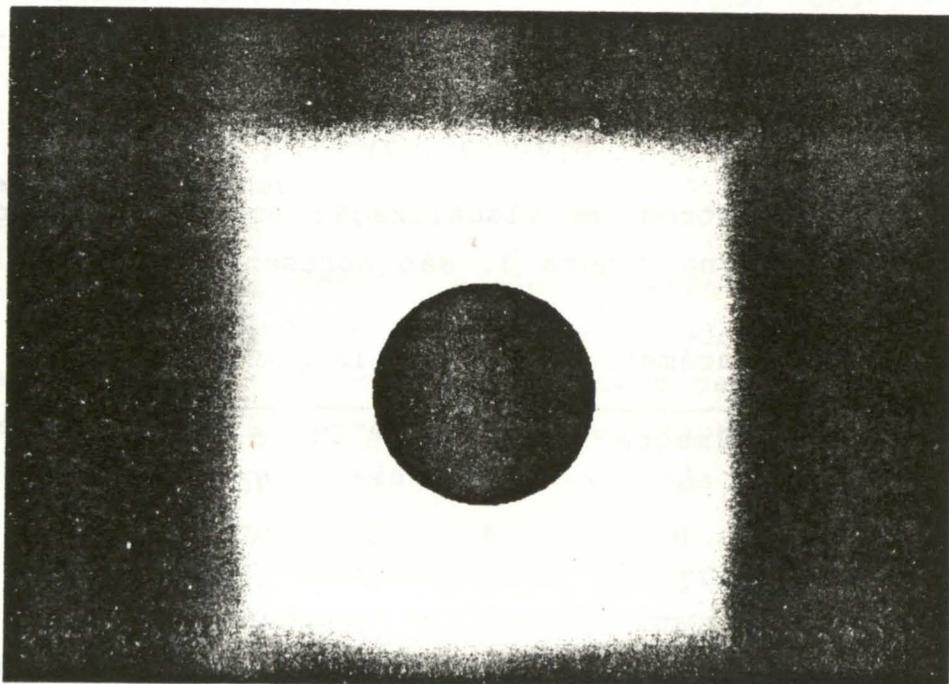


Figura 5. Imagem B.

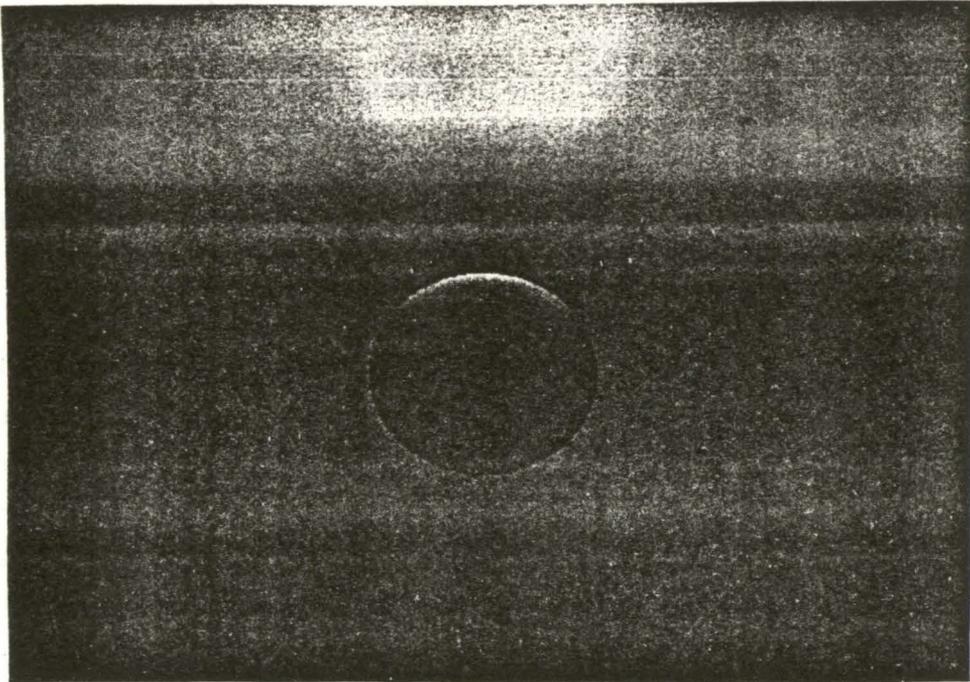


Figura 6. Imagem C.

Empregou-se um microcomputador AT386 (20MHz), em um ambiente Turbo Pascal 5.0, no desenvolvimento do protótipo que permitiu a obtenção dos arquivos de intensidades dos "pixels". Estes arquivos correspondem às imagens exibidas. Para a exibição, utilizou-se uma estação Proceda 5370 configurada em uma resolução de tela de 512x512 "pixels" e uma resolução luminosa máxima de 256 cores ou tons simultâneos.

#### 4. Análise dos Resultados Obtidos

##### 4.1 Tempos de Processamento

Os tempos de processamento empregados na síntese das imagens são apresentados de forma esquemática na tabela a seguir.

Tabela 3. Tempos de processamento referentes à geração das imagens.

Parcela	Imagem A	Imagem B	Imagem C
1	80 min	0 min	0 min
2	2 min	0 min	2 min
3	140 min	140 min	140 min
TOTAL	262 min	140 min	142 min

parcela 1 = cálculo dos fatores de forma.

parcela 2 = resolução do sistema de equações para a obtenção das radiosidades dos "patches".

parcela 3 = visualização, remoção de elementos ocultos e cálculo das intensidades dos "pixels".

As parcelas 1 e 2, que correspondem à aplicação propriamente dita do método da radiosidade, foram nulas na imagem B, pois tanto a geometria da cena como os aspectos de emissão luminosa (reflectividades e emissividades) permaneceram inalterados. Na imagem C, onde os valores de emissividades dos "patches" foram alterados, a parcela 2 foi diferente de zero, permanecendo a parcela 1 nula também para esta imagem. Desta forma, fica clara a economia que pode ser obtida empregando-se o método da radiosidade na síntese de imagens com diferentes parâmetros de visualização e iluminação a partir de uma cena cuja geometria permaneça inalterada.

A aplicação do método de Gauss-Jordan na resolução do sistema de equações foi eficiente. O tempo de processamento utilizado na parcela 2, 2 minutos, pode ser considerado bastante reduzido, se for comparado com o tempo gasto no cálculo dos fatores de forma, 120 minutos. Vale ressaltar, que o sistema de equações foi resolvido três vezes, de forma a se obter os valores das radiosidades dos "patches" correspondentes a cada banda de comprimento de onda de interesse no modelo de cores RGB, e o tempo correspondente a cada resolução foi de 33 segundos.

O tempo dispendido na parcela 3, foi excessivamente longo, mesmo levando-se em conta que nesta parcela não estão

embutidos somente os cálculos de intersecções para a determinação da visibilidade dos "patches", mas também os cálculos correpondentes à determinação das intensidades dos "pixels". Torna-se necessária a pesquisa de algoritmos mais rápidos para a remoção de elementos ocultos que não aproximem as superfícies curvas através de polígonos, de forma a aumentar a economia que pode ser obtida aplicando-se radiosidade e calculando-se os fatores de forma através do MDP, que não efetua tais aproximações.

Se o ambiente fosse dividido em um número maior de "patches, visando o aumento da qualidade das imagens, haveria um aumento do tempo gasto no cálculo dos fatores de forma. Entretanto, deve-se considerar que os fatores de forma seriam calculados apenas para a primeira imagem e o aumento do tempo de processamento correspondente às imagens subseqüentes dar-se-ia em uma proporção inferior. Desta forma, se fossem geradas muitas imagens diferentes de uma mesma cena, o aumento do número de "patches" poderia ser conveniente.

Durante o processo de síntese das imagens, a fim de acelerar a depuração das mesmas, diminuiu-se a resolução de tela. Ao invés de se trabalhar com todo o tamanho de tela disponível, 512x512 "pixels", gerou-se imagens de 256x256 "pixels". Esta resolução possibilitou a geração de imagens com um tempo, correspondente à parcela 3, quatro vezes menor, e, mesmo reduzida, permitiu a detecção de erros antes da geração das imagens que foram apresentadas neste trabalho.

#### 4.2 Espaço de Memória

O espaço de memória requerido para armazenamento dos fatores de forma e das radiosidades está diretamente relacionado ao número de "patches" do ambiente. Se este número for demasiado alto, o espaço de memória requerido poderá exceder os limites de um equipamento limitado como o que foi utilizado.

O armazenamento das intensidades por "pixel" está associado à resolução de tela empregada. Como a resolução empregada foi de 512x512 "pixels" e a cada "pixel" estão associados três valores correspondentes às componentes do modelo RGB, o tamanho da estrutura de dados necessária para armazená-los excedeu os limites do equipamento. A solução

encontrada foi dividir a resolução empregada em faixas de 512x40 "pixels". À medida que os valores de uma faixa eram determinados, eram salvos em disco e era iniciado o cálculo das intensidades correspondentes à faixa seguinte. Desta forma foi possível contornar o problema.

### 4.3 Qualidade

Se fosse empregado um número maior de "patches", ter-se-ia um aumento da qualidade das imagens, já que os fatores de forma, e conseqüentemente as radiosidades, seriam mais exatas. Além disso, as mudanças de tonalidade nas fronteiras dos "patches" tornar-se-iam mais suaves e as regiões de sombras ficariam melhor delineadas. Entretanto, como já foi citado, isto implicaria em um aumento considerável do tempo de processamento, assim como do espaço de memória requerido para armazenar os fatores de forma, principalmente tratando-se de equipamentos limitados como os que foram utilizados.

Uma alternativa que poderia ser considerada, tratando-se de zonas com grandes variações de luminosidade como contornos de sombras, seria o uso da técnica do subestruturamento, apresentada em [COH 86], ao invés de aumentar o número de "patches" de todo o ambiente. Outra alternativa seria a aplicação de radiosidade em um contexto de refinamento progressivo [COH 88], que permitiria uma redução nos custos de armazenamento dos fatores de forma da ordem de  $N^2$  para  $N$  [BAU 89], onde  $N$  representa o número de "patches" do ambiente, além de permitir a geração de imagens preliminares, sem a necessidade de calcular todos os fatores de forma.

Outro aspecto relevante quanto à qualidade das imagens diz respeito ao contorno do objeto curvo. Um dos problemas mais freqüentes das imagens sintetizadas através do método da radiosidade são os contornos poligonais que aproximam superfícies curvas, que comprometem o realismo destas imagens. Como o método do diferencial paramétrico, empregado no cálculo dos fatores de forma, não aproxima as superfícies curvas por polígonos, propiciando o uso das descrições exatas das superfícies durante o "rendering" das imagens, o objeto curvo utilizado não apresentou uma silhueta poligonal. Este aspecto positivo ficou evidenciado nas imagens apresentadas neste

trabalho, nas quais o contorno do objeto curvo ficou afetado apenas por problemas de "aliasing".

A limitada resolução luminosa disponível também afeta a qualidade das imagens, impossibilitando a utilização de um número maior de cores, que acarretaria uma diminuição do número de tons por cor, fazendo com que as transições de tonalidades ocorressem bruscamente. Na escolha da "palette" de tonalidades foi empregado um programa baseado no algoritmo da população, [GOM 90]. A implementação e utilização de algoritmos mais sofisticados para a determinação de "palettes", como o sugerido em [PER 90], poderia colaborar na suavização deste problema.

Vale assinalar que, nas imagens com menor resolução de tela (256x256 "pixels"), citadas no item anterior, as transições de tonalidades foram mais suaves do que nas imagens com maior resolução (512x512 "pixels"). Este aspecto deve-se ao fato de que o número de tons em uma imagem de 256x256 "pixels" é menor que o número de tons em uma imagem de 512x512 "pixels" correspondente a anterior, enquanto que a resolução luminosa máxima disponível (256 tons) para representá-las é a mesma, não importando o tamanho das imagens.

## 5. Conclusões

A partir da aplicação do método da radiosidade em um ambiente de "hardware" limitado pode-se concluir que a qualidade das imagens depende tanto do número de "patches" utilizados como da resolução luminosa disponível. O custo computacional associado à síntese das imagens, tempo de processamento e espaço de memória, depende também do número de "patches", devido ao cálculo e armazenamento dos fatores de forma, e da resolução espacial utilizada.

A grande vantagem do método da radiosidade, de ser independente da posição do observador, ficou evidenciada. Mudanças na posição da câmera, nas cores dos objetos e nas fontes de luz podem ser efetuadas rapidamente, sem implicar no recálculo dos fatores de forma. Isto permite a geração de várias imagens diferentes de uma mesma cena, com uma economia razoável de tempo de processamento. Este fato torna o

emprego do método da radiosidade bastante atrativo na geração de imagens, mesmo utilizando-se equipamentos limitados como os que foram empregados, visando a produção de seqüências de animação por câmera.

Também ficou evidenciado que o emprego do MDP no cálculo dos fatores de forma colabora para o aumento do grau de realismo das imagens. Esta colaboração, não se dá apenas na obtenção de radiosidades mais exatas [BAR 90], mas também verificou-se claramente no contorno não poligonal do objeto curvo presente nas imagens sintetizadas.

Esforços futuros serão concentrados no sentido de portar o "software" correspondente aos algoritmos empregados na síntese das imagens apresentadas para uma base superior de "hardware". Este procedimento permitirá uma análise mais abrangente do desempenho do MDP e a síntese de imagens mais complexas.

#### Bibliografia

- [BAR 90] BARANOSKI, G.V.G. Aplicação de Radiosidade à Síntese de Imagens de Objetos Formados Por Superfícies Curvas. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE COMPUTAÇÃO GRÁFICA E PROCESSAMENTO DE IMAGENS, 3., Gramado, 30 maio - 1 jun., 1990. **Proceedings**. Porto Alegre, SBC/II - CPGCC da UFRGS, 1990, p. 11-20.
- [BAR 91] BARANOSKI, G.V.G. **Aplicação de Radiosidade à Síntese de Imagens de Objetos Formados por Superfícies Curvas**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Departamento de Informática, CPGCC, 1991.  
(Dissertação de Mestrado)
- [BAU 89] BAUM, D.R. ; RUSHMEIER, H.E. & WINGET, J.M. Improving Radiosity Solutions Through The Use Of Analytically Determined Form Factors. **Computer Graphics**, New York, 23(3):325-34, July, 1989
- [CAR 69] CARNAHAN, B. ; LUTHER, H.A. & WILKER, J.O. **Applied Numerical Methods**. New York, John Wiley, 1969.
- [CAT 74] CATMULL, E. **A Subdivision Algorithm For Computer Display Of Curved Surfaces**. Utah, University of Utah, Department of Computer Science, 1974.  
(Tech. Report UTEC-(SC-74-133) (Phd Thesis)

- [CLA 89] Claudio, D.M. & Martins, J.M. **Cálculo Numérico Computacional**. São Paulo. Editora Atlas, 1989.
- [COH 85] COHEN, M.F. & GREENBERG, D.P. The Hemi-Cube A Radiosity Solution For Complex Environments. **Computer Graphics**, New York, 19(3):31-40, July, 1985.
- [COH 86] COHEN, M.F. ; GREENBERG, D.P. ; IMMEL, D.S. & BROCK, P.J. An Efficient Radiosity Approach For Realistic Image Synthesis. **IEEE Computer Graphics and Applications**, New York, 6(3):26-35, Mar., 1986.
- [COH 88] COHEN, M.F. ; GREENBERG, D.P. ; IMMEL, D.S. & BROCK, P.J. An Efficient Radiosity Approach For Realistic Image Synthesis. **IEEE Computer Graphics and Applications**, New York, 22(4):75-84, Aug., 1988.
- [GOM 90] GOMES, J.M. & VELHO, L.C. **Conceitos Básicos de Computação Gráfica**. São Paulo, IME-USP, 1990.
- [MUR 84] MURCH, G. Physiological Principles for the Effective Use Of The Color. **IEEE Computer Graphics**, New York, 4(11):49-54, Nov., 1984.
- [PAR 85] PARK, C.S. **Interactive Microcomputer Graphics**. Reading, Addison-Wesley, 1985.
- [PER 90] PERSIANO, R.C.M. ; ESPERANCA, C. & COMBA, J.L.D. Algoritmo Para A Exibição De Imagens Coloridas. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE COMPUTAÇÃO GRÁFICA E PROCESSAMENTO DE IMAGENS, 3., Gramado, 30 maio - 1 jun., 1990. **Proceedings**. Porto Alegre, SBC/II - CPGCC da UFRGS, 1990, p. 184-91.
- [ROG 85] ROGERS, D.F. **Procedural Elements For Computer Graphics**. New York, MacGraw-Hill, 1985.
- [WAL 89] WALLACE, J.R. ; ELMQUIST, K.A. & HAINES, E.R. A Ray Tracing Algorithm for Progressive Radiosity. **Computer Graphics**. New York, 23(3):315-25, July, 1989.
- [WIL 75] WILLIANSON, R.E. ; CROWELL, R.H. & TROTTER, H.F. **Cálculo de Funções Vetoriais**. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1975.

#### Agradecimentos

Ao professor Anatólio Laschuk e aos colegas Marcelo Walter, Rui Bastos, Marcos Eduardo do Nascimento e Manuel Menezes pelo apoio e incentivo.